Μιγαδικοί
Γενικές ασκήσεις

1)Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις $\chi^2 + 9$ και $-4\chi^2 - 25$

2)Να λύσετε το σύστημα:

$(1 - i)Z_1 - 3iZ_2 = 9 - 8i$
$(2 + i)Z_1 + (7 - 2i)Z_2 = 23 + 16i$

3)α) $Re(z + w) = Re(z) + Re(w)$	Σ	Λ
β) $Re(z - w) = Re(z) - Re(w)$	Σ	Λ
γ) $Re(zw) = Re(z)Re(w)$	Σ	Λ
δ) $Im(z + w) = Im(z) + Im(w)$	Σ	Λ
ε) $Im(\frac{z}{w}) = \frac{Im(z)}{Im(w)}$	Σ	Λ

4)Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στις παρακάτω περιπτώσεις:

a) $[Re(z)]^2 + [Im(z)]^2 = 4$
b) $[Re(z)+1]^2 + [Im(z)]^2 = 1$
c) $\frac{[Re(z)]^2}{16} + \frac{[Im(z)]^2}{25} = 1$
d) $z = (2\lambda + 1) + (3 - \lambda)i, \quad \lambda \in \mathbb{R}$
e) $z = \frac{1}{\lambda+1} + (\lambda+1)i, \; \lambda \in \mathbb{R} - \{-1\}$
f) $z = (συνθ - 2) + i(ημθ + 1)$
g) $|Re(z)| + |Im(z)| = 1$
h) $z = \lambda + 3i, \; \lambda \in \mathbb{R}$
i) $z = συνθ + 3i, \; \theta \in [0, 2\pi)$
j) $Re(z^2) = 4$
k) $Im(z^2) = -2$
l) $Re(z - iz) = 2$
m) $Im(z) + Re(z) = 5$

5)Αν $Re(z) = 2$ και $Im(z) = -3$ και $w = 1 + 5i$ να υπολογίσετε τα $Re(z^2)$, $Im(z^2)$, $Re(zw)$, $Im(zw)$, $Re(\frac{w}{z})$ και $Im(\frac{w}{z})$.

6)Έστω $z_1 = 1 - m + i$ και $z_2 = 1 + m - 2mi$. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού m ώστε
α) $Im(z_1z_2) = Re(z_1z_2)$ και β) $Im(z_1z_2) = 1$

7)Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ώστε οι μιγαδικοί
$w = 3 + |\gamma - 2|i$ και $z = |\alpha + 2| + (|\gamma^2 - 4| + |\beta - 2|)i$ να είναι συζυγείς.

8)Αν z, w μιγαδικοί να βρείτε τους συζυγείς των παρακάτω παραστάσεων :
α) $z + iw$, b) $z - iw$, c) $z(1+i) - 3w$, d) $z + 3$, e) $w + 2 + 3i$.

9)Να βρεθούν δύο γνήσιοι μιγαδικοί αριθμοί (όχι πραγματικοί) με άθροισμα 6 και γινόμενο 25 . Τι παρατηρείτε;

10)Γενίκευση της παραπάνω: Αν το άθροισμα και το γινόμενο δυο μιγαδικών αριθμών είναι πραγματικός, τότε οι μιγαδικοί αριθμοί είναι συζυγείς ή πραγματικοί.

11)Αν το άθροισμα δυο γνήσια μιγαδικών αριθμών καθώς και το άθροισμα τετράγωνων τους είναι πραγματικοί αριθμοί τότε οι μιγαδικοί είναι συζυγείς.

12)Να αποδειχθεί ότι ο $w=\dfrac{(1-i)(1-2i)(1-3i)(1-4i)(1-5i)}{(1+i)(2+i)(3+i)(4+i)(5+i)}$ είναι φανταστικός.

13)Έστω $z_1=\dfrac{2012+i2011}{2010-i2009}$ και $z_2=\dfrac{2012-i2011}{2010+i2009}$ να δείξετε ότι $z_1+z_2\in\mathbb{R}$ *και* $z_1-z_2\in I$.

14)Να δείξετε ότι ο μιγαδικός $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}-3{,}14i\right)(e+i\ln 2)+\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}+3{,}14i\right)(e-i\ln 2)$ είναι πραγματικός.

15)Αν $z\in$ C-{λ} και $\operatorname{Im}\left(\dfrac{\lambda+z}{\lambda-z}\right)=0$ $\lambda\in$ R* δείξτε ότι $z\in$ R

16)Έστω $z\in\mathbb{C}-\{1\}$ και $w=\dfrac{1+z}{1-z}$ να δείξετε την ισοδυναμία: w φανταστικός $\Leftrightarrow z\cdot\overline{z}=1$

17)Έστω $z\in\mathbb{C}^*$ και $w=\dfrac{z-i\overline{z}}{\overline{z}-iz}$, να δείξετε ότι $w\in\mathbb{R}$. Να δείξετε το ίδιο και για τον μιγαδικό $v=\dfrac{\overline{z}+iz}{z+i\overline{z}}$.

18)Έστω $z\in\mathbb{C}$ με $z\cdot\overline{z}=1$ και $z\neq 1$. Να δείξετε ότι ο αριθμός α = $\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^{2012}$ είναι πραγματικός ενώ ο αριθμός β = $\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^{2013}$ είναι φανταστικός.

19)Έστω $z\in\mathbb{C}^*$ και $w=\dfrac{z}{\overline{z}}-\dfrac{\overline{z}}{z}$, να δείξετε ότι:

a) $w\in I$
b) $\operatorname{Im}(w)\leq 2$

20)Έστω $z_1, z_2\in\mathbb{C}$ με $z_1\neq z_2$. Αν $\dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\in\mathbb{R}$ να δείξετε ότι $z_1\overline{z}_2\in\mathbb{R}$

21)Έστω $z\in\mathbb{C}-\{1\}$ με $z^{2012}+2012\overline{z}^{2012}=2013$. Να δείξετε ότι:

a) $z^{2012} = \overline{z}^{2012} = 1$
b) $z \cdot \overline{z} = 1$
c) $\dfrac{1+z}{1-z} \in I$

22)Αν α, β, γ ∈ R^* δείξτε ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ο αριθμός $z = \dfrac{\beta + \alpha i}{\beta - \gamma i}$ φανταστικός είναι οι αριθμοί α, β, γ να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

23)Να δειχθεί ότι α) $\dfrac{(1+i)^{2001}}{(1-i)^{1999}} = 2$ και β) $\dfrac{(1+i)^{2010}}{(1-i)^{2008}} = 2i$

24)Να υπολογιστεί η παράσταση: $\left(\dfrac{5+i}{1-5i}\right)^{\nu} + \left(\dfrac{5-i}{1+5i}\right)^{\nu}$, $\nu \in N$

25)Να αποδείξετε ότι για κάθε ν ∈N* ισχύει:
$i^{\nu} + i^{\nu+1} + i^{\nu+2} + i^{\nu+3} = \dfrac{1}{i^{\nu}} + \dfrac{1}{i^{\nu+1}} + \dfrac{1}{i^{\nu+2}} + \dfrac{1}{i^{\nu+3}}$

26)Για τις διάφορες θετικές ακέραιες τιμές του ν να βρείτε την τιμή των παραστάσεων: Α=$(1+i^{\nu})(1+i^{2\nu})$ και Β=$1 - i + i^2 - i^3 + \ldots + (-1)^{\nu} i^{\nu}$.

27)Να βρεθούν οι δυνατές τιμές των παραστάσεων :
α) Α = $(1+i^{\nu})(1+i^{2\nu})(1+i^{3\nu})\ldots(1+i^{\nu^2})$
β) Β = $(1+i)^{200}$

28)Αν ισχύει $i^k = i^{\lambda} = i^{\mu} = i^{\nu}$ όπου κ, λ, μ, ν$\in N^*$ να δείξετε ότι $i^{k+\lambda+\mu+\nu} = 1$

29)Να βρεθούν οι δυνατές τιμές της παράστασης Α = $\left(\dfrac{3+i}{1-3i}\right)^{\nu} + \left(\dfrac{i-3}{1+3i}\right)^{\nu}$.

30)Αν α, χ∈ R δείξτε ότι για κάθε ν∈N ισχύει: $\left(\dfrac{\alpha\chi + i}{1-\alpha\chi i}\right)^{4\nu} + \left(\dfrac{i-\alpha\chi}{1+\alpha\chi i}\right)^{4\nu} = 2$

31)Αν $z + \dfrac{1}{z} = -1$, $z \in C^*$, να δείξετε ότι α) $z^{2011} + \dfrac{1}{z^{2011}} = -1$ και β) $z^{2012} + \dfrac{1}{z^{2012}} = -1$

32)Έστω z = (1 – 3i)$^{\nu}$ + (i + 3)$^{\nu}$, $\nu \in N$
a) Να προσδιοριστούν οι τιμές του ν ώστε z = 0
b) Να προσδιοριστεί ο ελάχιστος φυσικός ν ώστε z^2 = 0.

33)*Να βρείτε για ποιες τιμές του φυσικού αριθμού ν ισχύει:
$\nu(3+4i)^{\nu} + (4-3i)^{\nu} + (-4+3i)^{\nu} = 0$

34)Έστω $Σ_1 = i \cdot i^2 \cdot i^3 ... i^ν$ και $Σ_2 = 1 + i + i^2 + i^3 + ... + i^ν$, $ν \in N$. Να προσδιοριστεί ο ν ώστε $Σ_1 – Σ_2 = 0$.

Εξισώσεις

35)Να λύσετε τις εξισώσεις α) $x^2 + 5 = 0$ β) $x^2 + 64 = 0$

36)α) Αν z, $w \in C$ τότε $z^2 + w^2 = 0 \Leftrightarrow z = w = 0$ Σ Λ

β) Αν z, $w \in C$ τότε $z^{2ν} + w^{2ν} = 0 \Leftrightarrow z = w = 0$ Σ Λ

37)α)Να βρείτε εξίσωση της μορφής $z^2 + αz + β = 0$ όπου α, β είναι πραγματικοί αριθμοί, που να έχει ρίζα τον αριθμό 2 – i .

β) Αν $ζ_1$, $ζ_2$ οι ρίζες της παραπάνω να δείξετε ότι $w = ζ_1^{2010} + ζ_2^{2010}$ είναι πραγματικός.

38)Αν μια ρίζα της εξίσωσης $3χ^2 – βχ + γ = 0$ (όπου β, γ είναι πραγματικοί) είναι η 2 – 3i, να βρείτε τις τιμές των β και γ.

39)Να λυθούν οι εξισώσεις : a) z + zi = i b) $z^2 = 6 – 8i$ c) $z^3 = 8$ d) $z^3 = - 27$
e) $z^3 + 2z(z + 1) + 1 = 0$.

40)Να προσδιορίσετε τους μιγαδικούς αριθμούς α, β ώστε να ισχύει $\frac{α}{z+i}+\frac{β}{z-i}=\frac{2}{z^2+1}$
για κάθε επιτρεπτό μιγαδικό αριθμό z. (Απ: i, -i)

41)α) Αν το πολυώνυμο $P(z) = α_ν z^ν + α_{ν-1} z^{ν-1} + … + α_1 z + α_0$ με $α_ν, α_{ν-1}, …, α_1, α_0 \in \mathbb{R}$, έχει ρίζα τον μιγαδικό αριθμό ρ, να δείξετε ότι έχει ρίζα και τον συζυγή του.

β) Αν η εξίσωση $z^3 + αz^2 + βz + γ = 0$ με α, β, γ $\in \mathbb{R}$ έχει λύση την z = 3 – 5i τότε ποιος από τους παρακάτω μιγαδικούς αποκλείεται να είναι ρίζα της:

Α. 6 Β. 3 + 5i Γ. 0 Δ. 2 + 5i Ε. - 4

42)Έστω α, β, γ $\in \mathbb{R}$ και $z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

a) Δείξτε ότι $z^2 = \overline{z}$ και ότι $z^2 + z + 1 = 0$
b) Δείξτε ότι $z^3 = 1$ και υπολογίστε τη δύναμη $\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2012}$
c) Αν $Α = (α + βz + γz^2) (α + βz^2 + γz)$ να δείξετε ότι $Α \in \mathbb{R}$
d) Αν Α = 0 τότε α = β = γ

43)Να λυθεί η εξίσωση $z^2 – 2(1 + συνθ)z + 2(1 + συνθ)^2 = 0$, $θ \in R$ και να βρεθεί η γραμμή στην οποία κινούνται οι εικόνες των ριζών της όταν το θ μεταβάλλεται στο R.

44)Το ίδιο για την εξίσωση $(συν^2θ)z^2 – (2συνθ)z + 5 – 4συν^2θ = 0$, όταν $θ \in \left(-\frac{π}{2},\frac{π}{2}\right)$

45)Να λυθούν στο C οι εξισώσεις α) $z^3 + 3z^2 + z – 5 = 0$ και β) $z^4 = 16$.

46)Δίνεται η εξίσωση $z^2 + 8\overline{z} + 16 = 0,\ z \in C$

a) Να λυθεί η εξίσωση
b) Να αποδειχθεί ότι οι εικόνες των ριζών της είναι κορυφές ισοσκελές τριγώνου.

47)Να βρεθούν οι μιγαδικοί z, w ώστε η εξίσωση zx + 2wx = w^2 + 4 να έχει 2014 λύσεις ως προς x στο σύνολο C.

Μιγαδικό επίπεδο-Γεωμετρικοί τόποι

48)Αν η διανυσματική ακτίνα του μιγαδικού ω = 2 $\bar{z}$ σχηματίζει γωνία 60^0 με τον ημιάξονα Ox, τότε η εικόνα του z είναι σημείο της ευθείας:

A. $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$, x>0 B. $y=2\sqrt{3}x,\ x>0$ Γ. $y=\sqrt{3}x,\ x>0$ Δ. $y=-\sqrt{3}x,\ x>0$

49)Αν z, w μιγαδικοί και λ πραγματικός έτσι ώστε z + (λ^2 – λ +1)w = 0, να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν οι διανυσματικές ακτίνες των z, w μεταξύ τους.

50)Αν z = -3ω και η διανυσματική ακτίνα του z σχηματίζει με τον ημιάξονα Ox γωνία 240^0, τότε η διανυσματική ακτίνα του ω σχηματίζει με τον ημιάξονα Ox γωνία:
A. - 120^0 B. 60^0 Γ. – 60^0 Δ. 180^0 E. 120^0

51)**Θεωρούμε τη συνάρτηση f: $C\to C$ με τις επόμενες ιδιότητες:
α) $f(z_1+z_2)=f(z_1)+f(z_2),\ \ \forall z_1,z_2\in C$ β) $f(z_1z_2)=f(z_1)f(z_2),\ \ \forall z_1,z_2\in C$
και γ) f(α) = α αν α$\in R$. Να αποδείξετε ότι f(z) = z ή f(z) = $\bar{z}$

52)Έστω Α, Β, Γ, Δ οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3, z_4 αντιστοίχως, οι οποίες ορίζουν τετράπλευρο. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο αν και μόνο αν $z_1 - z_2 = z_4 - z_3$.

53)Έστω z_1, z_2, z_3 μη μηδενικοί διαφορετικοί ανά δύο μιγαδικοί αριθμοί. Αν Α, Β, Γ οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΟΑΒΓ είναι παραλληλόγραμμο αν και μόνο αν $z_1 + z_3 = z_2$. (Ο η αρχή των αξόνων)

54)Έστω z, w μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί και Α, Β οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο στο Ο (αρχή των αξόνων) αν και μόνο αν $z\bar{w}+\bar{z}w=0$

55)Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων Μ των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $\mathrm{Im}\left(\frac{z-2}{z-6}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{z-2}{z-6}\right)$.

56)Έστω w = z $\bar{z}$ – z^2 – 4(z + $\bar{z}$) με z = χ +ψi , χ, ψ$\in R$.Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ(χ, ψ) όταν:
a) w$\in R$
b) ο w είναι φανταστικός.

57)Έστω z = χ +ψi, χ, ψ$\in R$. και w = $\frac{z+1}{z-2i}$. Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων Μ(χ, ψ) όταν:
a) w$\in R$
b) ο w είναι φανταστικός.

58)Έστω ο μιγαδικός αριθμός z = α + βi με $\alpha^2 - \beta^2 = 8$. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $w = z^2$ βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία.

59)Αν z = χ + ψi και ο αριθμός $u = (z-1)(\bar{z} - i)$ είναι πραγματικός να αποδείξετε ότι η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει σε ευθεία.

60)Έστω z_1, z_2, z_3 μιγαδικοί διαφορετικοί ανά δύο με εικόνες Α, Β, Γ στο μιγαδικό επίπεδο. Να αποδειχθεί ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά αν και μόνο αν ο αριθμός $z = \dfrac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3}$ είναι πραγματικός.

61)Έστω η συνάρτηση f : C-{i} $\rightarrow$ C   με $f(z) = \dfrac{i\bar{z} - 1}{z - i}$

α) υπολογίστε το $f(\sqrt{3} + 2i)$

β) λύστε την εξίσωση $f(z) = 1 + i$

γ) βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων που είναι εικόνες του z όταν

Ι). Ο $f(z)$ είναι πραγματικός   και   ΙΙ). Ο $f(z)$ είναι φανταστικός.

62)Έστω ο μιγαδικός αριθμός z = χ + ψi . Αν ο αριθμός $u = \dfrac{z - 4i}{z - 2}$,   με $z \neq 2$ είναι πραγματικός, να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ(χ, ψ) βρίσκονται σε ευθεία γραμμή της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

63)Αν η εικόνα Μ του μιγαδικού $z \neq 1$ διαγράφει την ευθεία ε: x+ y = 1 να δείξετε ότι η εικόνα Ν του μιγαδικού $w = \dfrac{z+1}{z-1}$, βρίσκεται σε ευθεία που είναι κάθετη στην (ε).

64)Αν $z \in C - \{0\}$ και η εικόνα του κινείται στην ευθεία ψ = χ να δείξετε ότι η εικόνα του $w = z + \dfrac{1}{z}$ κινείται σε υπερβολή.

65)Δίνονται οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύει $3w - [\mathrm{Im}(w)]i = z + 2i$. Αν η εικόνα του z κινείται στην έλλειψη $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ να αποδείξετε ότι η εικόνα του w κινείται σε κύκλο.

66)*Αν z = 2χ + 3ψi, χ, $\psi \in$ R και η εικόνα του $w = \dfrac{z-6}{z+6}$, $z \neq -6$ στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκεται στον άξονα ψ'ψ να δείξετε ότι :

α) το σημείο (χ, ψ) ανήκει σε έλλειψη

β) ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ(z) είναι κύκλος.

67)Αν Α, Β είναι οι εικόνες των μιγαδικών z, w στο μιγαδικό επίπεδο με $w \neq 0$, να δείξετε τα παρακάτω:

a) $z\bar{w} \in R \Leftrightarrow \dfrac{z}{w} \in R \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} // \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow$ O, A, B συνευθειακά

b) $z\overline{w} \in I \Leftrightarrow \frac{z}{w} \in I \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$, όπου O η αρχή του μιγαδικού επιπέδου.

68)Έστω z μιγαδικός αριθμός

a) Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο (Σ) των εικόνων των μιγαδικών z που ικανοποιούν τις σχέσεις $\overline{z} = \frac{4}{z}$ και $\mathrm{Im}(z) \geq 0$

b) Να αποδείξετε ότι, αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z κινείται στο σύνολο (Σ), τότε η εικόνα του μιγαδικού $w = \frac{1}{2}(z + \frac{4}{z})$ κινείται σε ευθύγραμμο τμήμα το οποίο βρίσκεται στον άξονα χ'χ

69)Αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z κινείται στον κύκλο (c): $x^2 + y^2 = 4$ να αποδείξετε ότι η εικόνα του αριθμού $w = z + \frac{4i}{\overline{z}}$ κινείται επίσης σε κύκλο.

70)*Θεωρούμε τους μιγαδικούς z = χ + ψi (χ, $\psi \in R$) για τους οποίους υπάρχει $\alpha \in R$ έτσι ώστε $\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)^2 i = a + (1-a)i$. Να αποδείξετε ότι:

a) Αν Im(z) = 0 τότε α = 1
b) Αν α = 0 τότε $z^2 + 1 = 0$
c) Για τον $\alpha \in R$ ισχύει $0 \leq a \leq 1$
d) Οι εικόνες Μ των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο , ανήκουν σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

71)Αν α, β μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί και $(a + \beta i)^{11} \in R$ να δείξετε ότι ο $(\beta + ai)^{22} < 0$

Μέτρο

72)Να βρεθεί το μέτρο των παρακάτω μιγαδικών αριθμών :

$\alpha)\frac{-2-3i}{-3+5i}$ β) $\frac{(1-\iota)^3}{(1+\iota)^2} - 2 + 3\iota$ γ)$\left(\frac{2-2\iota}{-1-3\iota}\right)^2$ δ)$\left(\frac{7+\sqrt{3}\iota}{3-2i}\right)^\nu$, $\nu \in N$

73) Έστω z = $(\alpha + \beta i)^\nu$, α, $\beta \in \mathbb{R}^*$. Να δείξετε ότι $[\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2 = (a^2 + \beta^2)^\nu$, όπου ν φυσικός

74)*Η εξίσωση $\alpha\zeta^2 + \beta\zeta + \gamma = 0$, με α, β, $\gamma \in R$ έχει ρίζες ζ_1, ζ_2 με $|\zeta_1| \neq |\zeta_2|$ τότε

Α. οι ζ_1, ζ_2 είναι καθαρά μιγαδικοί
Β. οι ζ_1, ζ_2 είναι πραγματικοί
Γ. οι ζ_1, ζ_2 είναι φανταστικοί
Δ. δεν γνωρίζουμε

75)Να λυθούν στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών τα συστήματα :

α) $\begin{cases} z^3 + \overline{\omega}^7 = o \\ z^5\omega^{11} = 1 \end{cases}$ β) $\begin{cases} z^3 + \omega^5 = 0 \\ z^2\overline{\omega}^4 = 1 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} z^{13}\omega^{19} = 1 \\ z^5\omega^7 = 1 \\ z^2 + \omega^2 = -2 \end{cases}$

76)Αν για τον μιγαδικό z ισχύει $z^7 + \dfrac{1}{\overline{z}^5} = 0$, να δείξετε ότι $|z| = 1$ και να τον υπολογίσετε.

77)Αν α, β, γ μιγαδικοί αριθμοί τότε να δείξετε ότι ισχύουν:

α) $\left|\overline{a} - \overline{\beta}\right| \le |a| + |\beta|$ β) $|\alpha - \beta| \le |\alpha - \gamma| + |\beta - \gamma|$

γ) $|a||\beta - \gamma| \le |\beta||\gamma - \alpha| + |\gamma||\alpha - \beta|$

78)Α. Να γράψετε την παράσταση Α = $1 + |z|^2 |w|^2 + z\overline{w} + \overline{z}w$ ως τετράγωνο μη αρνητικού αριθμού.

Β. Να δείξετε ότι $x^2 + 2|z - w|x + (1 + |z|^2)(1 + |w|^2) \ge 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

79)Η εξίσωση $|z - z_0| = |z_0|$ παριστάνει κύκλο ο οποίος: (επιλέξτε το σωστό)

a) Έχει κέντρο την εικόνα του z_0 και διέρχεται από την εικόνα του $-z_0$

b) Έχει κέντρο την εικόνα του $-z_0$ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων

a) Έχει κέντρο την εικόνα του z_0 και διέρχεται από την αρχή των αξόνων

b) Έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και διέρχεται από την εικόνα του z_0

80)Α. Να δείξετε ότι η διανυσματική ακτίνα του μιγαδικού z είναι κάθετη στην διανυσματική ακτίνα του μιγαδικού $i \cdot z$.

Β. Αν α, β, γ μιγαδικοί με $a \ne \beta$ και $\alpha - \beta = i(\alpha - \gamma)$. Να δείξετε ότι εικόνες των μιγαδικών α, β, γ είναι κορυφές ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου.

81)Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης:

$(-2+i)^{20}(z-2000)^{2009} - (\sqrt{3} + i\sqrt{2})^{20}(z - 2008 - 2i)^{2009} = 0$ ανήκουν σε ευθεία, της οποίας να προσδιορίσετε την εξίσωση.

82)Δείξτε ότι το πραγματικό μέρος κάθε ρίζας της εξίσωσης $(z + 2)^\nu = z^\nu$ είναι ίσο με –1 , όπου ν φυσικός με ν>1.

83)Αν $5(1 + z)^{20} = (3 + 4i)(1 - z)^{20}$. Δείξτε ότι:

α) $|1 + z| = |1 - z|$

β) ο z είναι φανταστικός.

84)Να αποδείξετε ότι οι ρίζες των εξισώσεων $|2 - w| = |wi + 2i|$ και

$(2012 + 3z)^{2011} + i(2012 - 3z)^{2011} = 0$ έχουν εικόνες στον φανταστικό άξονα.

85)Να βρεθεί στο μιγαδικό επίπεδο ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z για τον οποίο ισχύει: α) $|z - 2 + i| = 7$ β) $|z + 1 - 5i| < 2$

γ) $2 < |z - 4 + 2i| < 3$ δ) $|z + 1 - i| = |z - i|$.

86)α) Αν ισχύει $(2i - 4w)^{2012} = \dfrac{1 + i\sqrt{15}}{4}$, να δείξετε ότι οι εικόνες του w ανήκουν σε κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα του.

β) Αν z + 2i = w, όπου ο μιγαδικός w ανήκει στον προηγούμενο κύκλο και δεν είναι φανταστικός, να δείξετε ότι ο αριθμός $u=\left(\frac{i+z}{i-z}\right)^{2013}$ είναι φανταστικός.

87)Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases}|z+i|=|z+2|\\|z+1|=|z-i|\end{cases}$ αφού πρώτα περιγράψετε γεωμετρικά τις δυο εξισώσεις.

88)Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z που επαληθεύουν το σύστημα $\begin{pmatrix}|z-1|\leq 1\\|z-2|=1\end{pmatrix}$.

89)Να δειχθεί ότι η εξίσωση $(1 + iz)^{2005} = \frac{1+i\sqrt{2}}{\sqrt{3}+i}$, $z\in C$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

90)Δείξτε ότι η εξίσωση $z\cdot\overline{z}-2|z|+1=0$ έχει άπειρες λύσεις.

91)Να λυθεί στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών η εξίσωση: $-z+|3z+i|-2i=0$.
(αδύνατη)

92)Αν κ είναι πραγματικός να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού $z=\frac{k+i}{k-i}$ διαγράφει κύκλο ακτίνας 1 και κέντρου Ο(0, 0).

93)*Έστω z = χ + ψi με $\psi\neq 0$ και $w=\frac{2z-1}{z^2}$. Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός αν και μόνο αν η εικόνα του z κινείται σε κύκλο από τον οποίο έχουν εξαιρεθεί τα σημεία (0, 0) και (1, 0).

94)*Αν χ, ψ, ζ είναι μιγαδικοί τέτοιοι ώστε $|\chi|=|\psi|=|\zeta|=1$, χ + ψ + ζ = 1 και χψζ = 1 τότε:

a) δείξτε ότι $\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\psi}+\frac{1}{\zeta}=1$ και

b) να υπολογίσετε τους χ, ψ, ζ.

95)Αν $z\neq\pm 1+0i$ δείξτε ότι ισχύει η ισοδυναμία: $|z|=1 \Leftrightarrow w=\frac{z-1}{z+1}$ είναι φανταστικός.

96)Αν $|z_1|=|z_2|=1$ και $1+z_1z_2\neq 0$ δείξτε ότι $w=\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}\in R$.

97)Αν για τον μιγαδικό z ισχύει $|z+9|=3|z+1|$ αποδείξτε ότι $|z|=3$.

(Ισοδύναμα θα μπορούσε να ζητηθεί να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών που ικανοποιούν την $|z+9|=3|z+1|$ ανήκουν σε κύκλο κέντρου (0, 0) και ακτίνας 3).

98)α) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z στο μιγαδικό επίπεδο που ικανοποιούν τη σχέση $2|z-1|=|z-4|$ βρίσκονται σε κύκλο κέντρου (0, 0) και ακτίνας 2.

β) Αν z_1, z_2 μιγαδικοί που επαληθεύουν την παραπάνω σχέση με $|z_1 - z_2| = 4$ να υπολογίσετε το $|z_1 + z_2|$

99)* Δίνεται ο μιγαδικός z για τον οποίο ισχύει: $1 + 2z + 2^2z^2 + \ldots + 2^\nu z^\nu = 0$, να δειχθεί ότι:

a) $|z| = \frac{1}{2}$

b) Ο $(1 + 2z)(1 - 2\bar{z})$ είναι φανταστικός.

100)Αν $z \in C - \{-\frac{1}{2}\}$, να δειχθεί ότι: $\left|\frac{1-2z}{1+2z}\right| < 1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) > 0$.

101)α) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών z με την ιδιότητα $|z + i|<|z - i|$

β) Αν οι μιγαδικοί α, β, γ ανήκουν στον προηγούμενο γ. τ. να δείξετε ότι και το άθροισμα τους ανήκει στον ίδιο γ. τ.

102)* α) Αν $\zeta_1, \zeta_2 \in C$ και $\zeta_1 = \zeta_2 \Leftrightarrow |\zeta_1| = |\zeta_2|$ Σ Λ

β) Αν $\zeta \in C$ και $\zeta^2 - |\zeta|^2 = 0$ τότε: (επιλέξτε το σωστό)

Α. $\mathrm{Im}(\zeta) \neq 0$ Β. $\zeta \in R$ Γ. $\zeta \in I$

103)α) Δείξτε ότι για κάθε $z_1, z_2 \in C$ ισχύει: $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$

β) Αν $|z_1+z_2| = |z_1| = |z_2|$ δείξτε ότι $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}|z_1|$.

104)Αν $z^2 - z + 1 = 0$ δείξτε ότι $|z - 1| = |z| = 1$ και αντιστρόφως.

105)Αν z, w μη μηδενικοί μιγαδικοί να αποδείξετε την ισοδυναμία:

$z^2 - zw + w^2 = 0 \Leftrightarrow |z| = |w| = |z - w|$.

106)Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με $z \cdot w \neq 0$ και $|z| = |w| = |z - w| = 1$. Αν $\gamma = \frac{z}{w}$ να αποδείξετε ότι:

a) $\bar{\gamma} = \frac{1}{\gamma}$

b) $\gamma^3 = -1$

c) $|z^{2012} + w^{2012}| = 1$

107)Δείξτε ότι για κάθε z_1, $z_2 \in C$ ισχύει:

α) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \iff \dfrac{z_1}{z_2} = k > 0$

β) $|z_1 - z_2| = |z_1| + |z_2| \iff \dfrac{z_1}{z_2} = k < 0$

γ) $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2| \iff \dfrac{z_1}{z_2}$ είναι φανταστικός.

108)*Αν Α, Β είναι οι εικόνες των μιγαδικών z, w στο μιγαδικό επίπεδο με $w \neq 0$, να δείξετε τα παρακάτω:

a) $\dfrac{z}{w} \in \mathbb{R} \iff O, A, B$ *συνευθειακά*

b) $\dfrac{z}{w} \in I \iff \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$

c) $z\overline{w} \in R \iff \overrightarrow{OA} // \overrightarrow{OB} \iff$ Ο, Α, Β συνευθειακά

d) $z\overline{w} \in I \iff \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$, όπου Ο η αρχή του μιγαδικού επιπέδου.

e) Αν $|z + w| = |z| + |w| \iff \overrightarrow{OA} \nearrow\nearrow \overrightarrow{OB}$

f) Αν $|z - w| = |z| - |w| \iff \overrightarrow{OA} \nearrow\swarrow \overrightarrow{OB}$

109)Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z με την ιδιότητα οι διανυσματικές ακτίνες των μιγαδικών z + i και z – i να είναι αντίρροπες.

110)*Έστω $z_1, z_2, z_3 \in C$ με $z_1 \neq z_2 \neq z_3$. Αν $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \rho$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ να δείξετε ότι οι εικόνες τους ορίζουν ισόπλευρο τρίγωνο.

111)*Δίνονται οι μηδενικοί μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 για τους οποίους ισχύουν $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ και $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$. Να δείξετε ότι οι εικόνες τους ισαπέχουν από την αρχή των αξόνων.

112)*Αν $|z_1| = |z_2| = |z_3| \neq 0$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, να δείξετε ότι $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$

113)Αν $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ με $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$ και $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$.
Να δείξετε ότι $|z_1 + z_2 + z_3| = 2$

114)*α)Έστω $z \in C - \{-1\}$. Να δείξετε ότι $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| < 1 \iff \mathrm{Re}(z) > 0$

β) Έστω $z_1, z_2, \ldots z_\nu \in C - \{-1\}$ με $\left|\dfrac{z_1 - 1}{z_1 + 1}\right| + \left|\dfrac{z_2 - 1}{z_2 + 1}\right| + \ldots + \left|\dfrac{z_\nu - 1}{z_\nu + 1}\right| < 1$ να δείξετε ότι $\left|\dfrac{z_1 + z_2 + \ldots + z_\nu - 1}{z_1 + z_2 + \ldots + z_\nu + 1}\right| < 1$

115)*α)Έστω $z \in C - \{-i\}$. Να δείξετε ότι $\left|\frac{z-i}{z+i}\right| < 1 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) > 0$

β) Έστω $z_1, z_2, \dots z_v \in C - \{-i\}$ με $\left|\frac{z_1 - i}{z_1 + i}\right| + \left|\frac{z_2 - i}{z_2 + i}\right| + \dots + \left|\frac{z_v - i}{z_v + i}\right| < 1$ να δείξετε ότι $\left|\frac{z_1 + z_2 + \dots + z_v - i}{z_1 + z_2 + \dots + z_v + i}\right| < 1$

116)Βρείτε τον μιγαδικό z αν είναι γνωστό ότι τα σημεία Α, Β, Γ που είναι εικόνες των μιγαδικών i, z, iz είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.

117)Δίνονται οι διαφορετικοί ανά δύο μιγαδικοί z_i, $i = 1, \dots, 4$ με $|z_i| = 1$ και $\sum_{i=1}^{4} z_i = 0$. Αν Α, Β, Γ, Δ είναι οι εικόνες των μιγαδικών να δείξετε ότι:

a) Το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ είναι η εικόνα του μιγαδικού $\frac{z_1 + z_2}{2}$
b) Το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο
c) Ισχύει $|z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| + |z_3 - z_4| + |z_4 - z_1| < 2\pi$

118)Έστω z, w μη μηδενικοί μιγαδικοί και Α, Β οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο. Να αποδείξετε ότι ο $\frac{(z-w)^2}{zw}$ είναι πραγματικός αν και μόνο αν τα σημεία Α, Β, Ο είναι συνευθειακά ή κορυφές ισοσκελούς τριγώνου. (Ο η αρχή των αξόνων)

119)Αν για τον μη μηδενικό μιγαδικό z ισχύει: $\left|\frac{z + |z|}{2}\right| + \left|\frac{z - |z|}{2}\right| = |z|$ τότε δείξτε ότι ο z είναι πραγματικός.

120)Να βρεθεί ο γ. τ. των εικόνων των μιγαδικών z στις παρακάτω περιπτώσεις:
a) z = 2 – συνθ + (1 + ημθ)i, $\theta \in R$
b) z = 2λ + 1 + (3 – λ)i, $\lambda \in R$
c) z = εφθ $-\frac{i}{\sigma\upsilon\nu\theta}$, $\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$
d) z = 3 – ημθ + 2i , $\theta \in R$
e) z = 3 + (1 + συνθ)i , $\theta \in R$
f) z = $(2\lambda + i)^2 + 3$, $\lambda \in R$

Μέγιστο ελάχιστο μέτρο

121)Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2, με $|z_1 - 6| = 1$ και $|z_2 - 3i| = 2$.
a) Να προσδιορισθούν οι καμπύλες που ανήκουν οι εικόνες των z_1, z_2.
b) Να προσδιορισθούν οι μιγαδικοί z_1 για τους οποίους ισχύει $\mathrm{Re}(z_1) > 6{,}5$

c) Να βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο της παράστασης $|z_1 - z_2|$.

122)Α. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών αριθμών z με την ιδιότητα $|\bar{z}+2+5i|=2$.

Β. Από όλους τους μιγαδικούς που ανήκουν στον προηγούμενο γ. τ. να βρεθεί αυτός:

a) Του οποίου η διανυσματική ακτίνα σχηματίζει την μικρότερη γωνία με τον άξονα χ΄χ
b) Που απέχει λιγότερο από τον άξονα χ΄χ
c) Του οποίου η διανυσματική ακτίνα σχηματίζει τη μεγαλύτερη γωνία με τον άξονα χ΄χ.

123)α) Να αποδείξετε ότι $|z-5i|=3|z+3i| \Leftrightarrow |z+4i|=3$.

β) Από τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει $\dfrac{|z-5i|}{|z+3i|}=3$ να βρείτε αυτούς με το ελάχιστο μέτρο και το μέγιστο μέτρο.

124)α) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z για τον οποίο ισχύει $|z - 2i| = 3|z + 2i|$.

β) Αν για τους μιγαδικούς $z_1, z_2 \neq -2i$ ισχύει $\left|\dfrac{z_1-2i}{z_1+2i}\right|=\left|\dfrac{z_2-2i}{z_2+2i}\right|=3$ να βρεθεί η μέγιστη τιμή του $|z_1-z_2|$

125)α) Έστω z = χ +ψi , να βρεθεί το σύνολο των σημείων Μ(z) του μιγαδικού επιπέδου όταν $|z-1+2i|=|z-\sqrt{3}i|$.

β) Να βρείτε τον μιγαδικό που επαληθεύει την παραπάνω σχέση και έχει το ελάχιστο μέτρο.

126)Για ένα μιγαδικό z ισχύει $|z - 3i| = |z - 5|$. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει το μέτρο του $|z|$.

127) α) Να βρεθεί ο γεωμετρικός των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο όταν $|z - 2 - 4i| = 1$

β) Να βρεθεί η ελάχιστη και η μεγίστη τιμή της παράστασης $ψ = |z + 1|$ για τους μιγαδικούς του παραπάνω ερωτήματος.

128)**Δίνονται οι μιγαδικοί z και w για τους οποίους ισχύει: $|z - i| = |2iz - 1|$ και $\left|1+\dfrac{1+i}{w}\right|=1$

a) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο C_1 των εικόνων στο μιγαδικό επίπεδο των μιγαδικών z.
b) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο C_2 των εικόνων στο μιγαδικό επίπεδο των μιγαδικών w
c) Αν τα σημεία M_1, M_2 είναι κοινά των C_1, C_2 και εικόνες των z_1, z_2 αντίστοιχα να δείξετε ότι $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 4$.

129)*Έστω ότι η εξίσωση $z^2 + αz + β = 0$, $α, β \in R$ έχει ρίζες τους $z_1 = -\frac{2}{i}$ και z_2

a) Να βρείτε τους α, β και z_2
b) Να βρείτε το $ν \in N$ ώστε $z_1^ν - z_2^ν = -16i$
c) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού z στο μιγαδικό επίπεδο για τον οποίο ισχύει: $|z-z_1|^2 + |z-z_2|^2 = 16$ (1)
d) Αν για τον μιγαδικό z ισχύει η (1) να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z - 4 - 4i|$.

130)Δίνεται ο μιγαδικός $z = (2ημα - 1) + (3 - 2συνα)i$, $α \in R$

a) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των σημείων M(z) είναι σημεία κύκλου
b) Να αποδείξετε ότι $3 \le |z - 2 + i| \le 7$
c) Να βρείτε τους μιγαδικούς z με το ελάχιστο και μέγιστο μέτρο.

131)α) Αν $|z + 3| = 2|z - 3|$ (1) δείξτε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι κύκλος του οποίου να βρείτε το κέντρο του και την ακτίνα του.
β) Να βρείτε την ελάχιστη και την μέγιστη τιμή του $|z|$ και του $|z - 4i|$.
γ) Αν z_1, z_2 δυο μιγαδικοί που ικανοποιούν την (1) με $|z_1 - z_2| = 8$ να υπολογίσετε το $|z_1 + z_2|$

132) α)Να βρεθεί το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $|z-2| = |\bar{z} - i|$.
β) Ποιος από τους παραπάνω μιγαδικούς έχει το ελάχιστο μέτρο και ποιο είναι αυτό.

133)Να προσδιοριστεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M(z) όταν :
$z = \frac{1+t}{1+i+2t}$, $t \in R$.

134)Να αποδείξετε ότι οι εικόνες του μιγαδικού $z = (λ - 1)^2 + 2(λ - 1)i$ όταν το λ μεταβάλλεται στο R, κινούνται σε μια παραβολή.

135)Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο C - {- i} των μιγαδικών αριθμών και τύπο $f(z) = \frac{z-i-2}{z+i}$ να βρείτε:

a) για ποια z ισχύει $f(z) = z$
b) τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z όταν $|f(z)| = 1$.

136)Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \frac{z+i}{\bar{z}+1}$, $\bar{z} \neq -1$.

a) Αν $|f(z)| = 1$ τότε να δειχθεί ότι $\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{4k} = 1$, $k \in N^*$
b) Να δειχθεί ότι $f(i \cdot \bar{z}) \cdot f(z) = -1$

137)*α) Να προσδιορίσετε το σύνολο $C_α$ των σημείων Μ του επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z = χ + ψi με χ, $ψ \in R$ και ικανοποιούν την ισότητα : $i(z+\bar{z}-a) + z-\bar{z} = 0$, όπου $α \in R$.

β) Αν $A\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right) \in C_a$, να προσδιορίσετε σημείο $B \in C_a$ τέτοιο ώστε η μεσοκάθετος του ΑΒ να διέρχεται από το κέντρο του κύκλου $K_β$ με εξίσωση $|z + 1 - 3i| = β$, $β > 0$.

Για ποια τιμή του β ο κύκλος $K_β$ εφάπτεται του $C_α$;

138)**Έστω $z_1, z_2 \in C$ οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 - αz + 9 = 0$, $α \in R$ και $z_1, z_2 \notin R$.

a) να βρείτε τα $|z_1|$, $|z_2|$ και τις δυνατές τιμές του α.

b) αν $\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}=-2$, να βρείτε το α.

c) Για α = 0 να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού z στο μιγαδικό επίπεδο για τον οποίο ισχύει $|z - z_1| + |z - z_2| = 10$.

d) Να βρείτε την ελάχιστη και την μέγιστη τιμη του $|z|$.

139)*Έστω $z_1, z_2 \in C$ οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 - z + α = 0$, $α \in R$ και $z_1, z_2 \notin R$.

a) να δείξετε ότι $α > \frac{1}{4}$.

b) αν $|z_1| = 1$, τότε:

i) να βρείτε το α

ii) να λύσετε την εξίσωση.

iii) να βρείτε που βρίσκονται οι εικόνες του μιγαδικού z στο μιγαδικό επίπεδο για τον οποίο ισχύει $(z-z_1)^5-(z-z_2)^5=0$.

140) * Έστω ο μιγαδικός z

a) Να δείξετε ότι : $|z(1 + i) - 2| = \sqrt{2}\ |z - 1 + i|$.

b) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z για τους οποίους ισχύει: $|z(1 + i) - 2| = \sqrt{3}\ |iz|$ (1).

c) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του μέτρου του μιγαδικού z που επαληθεύει την (1)

d) Αν οι μιγαδικοί z_1,z_2 επαληθεύουν την (1), να βρείτε τη μέγιστη τιμή του μέτρου $|z_1 - z_2|$

141)Αν $|z - 3 - 4i| = 5$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = |z|^2 + |z - 6 - 8i|^2$

142)Αν $|z + 2i| = \sqrt{8}$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A= |z + 2|^2 + |z - 2 + 4i|^2$

143)Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2 με $|z_1|=|z_2| = \sqrt{2}$

a) Να δείξετε ότι $|z_1 + z_2 + z_1z_2 - 2| = |z_1 + z_2 - z_1z_2 + 2|$

b) Να δείξετε ότι $z_1 + z_2 + z_1z_2 - 2 = 0 \Leftrightarrow z_1 + z_2 - z_1z_2 + 2 = 0$

c) Αν $z_1 + z_2 - z_1z_2 = -2$ να βρείτε τους z_1, z_2.

144)Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων μ των μιγαδικών z που ικανοποιούν τη συνθήκη $\left|z-\left|z+1\right|\right| = \left|z+\left|z-1\right|\right|$ **(υψώνουμε στο τετράγωνο και ο γ.τ. είναι ο άξονας ψ'ψ ή το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα (-1,0) και (1, 0))**

145)Θεωρούμε α, β, γ$\in C$ έτσι ώστε |α| =|β + γ|, |β|=|γ + α| και |γ|=|α + β|. Να δείξετε ότι α + β + γ = 0.

146)Έστω α, β, γ $\in C$ με |α| = |β| = |γ| = 1 και |2α + β + γ|^2 + |α + 2β + γ|^2 + |α + β + 2γ|^2 = 3. Να αποδείξετε ότι

a) α + β + γ = 0
b) οι α, β, γ είναι διαφορετικοί μεταξύ τους και αβ + βγ + γα = 0
c) $\mathrm{Re}(a\bar{\beta}) = \mathrm{Re}(\beta\bar{\gamma}) = \mathrm{Re}(\gamma\bar{a}) = -\dfrac{1}{2}$
d) |α – β| = |β – γ| = |γ – α| = $\sqrt{3}$
e) |α + 1| + |α^2 + 1| + |α^3 + 1| $\geq$ 2
f) Αν Α, Β, Γ είναι οι εικόνες των α, β, γ αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο:
   i) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ
   ii) Το μιγαδικό με εικόνα το περίκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.

147)Να δειχτεί ότι για τυχαίο μιγαδικό z ισχύει:

a) $\left|z+2\right| \leq \left|z\right| + 2$
b) $\left|z+3i\right| + \left|\bar{z}+i\right| \leq 2\left|z+i\right| + 4$
c) για ποιους μιγαδικούς ισχύουν οι παραπάνω ως ισότητες;

148)Έστω z,ω, μιγαδικοί για τους οποίους ισχύουν |z + 5i| = 3 και |ω – 6| = 2

a) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z και 2ω.
b) Να δείξετε ότι $6 \leq |z - 2\omega| \leq 20$

149)**α) Αν ισχύει $(2i-4\omega)^{2009} = \dfrac{1+i\sqrt{15}}{4}$, να δείξετε ότι ο ω ανήκει σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

β) Αν ζ + 2i = 4ω, όπου ο ω ανήκει στον προηγούμενο κύκλο και δεν είναι φανταστικός, να δείξετε ότι ο αριθμός u = $\left(\dfrac{i+\zeta}{i-\zeta}\right)^{2011}$ είναι φανταστικός, ενώ ο v = $\left(\dfrac{i+\zeta}{i-\zeta}\right)^{2010}$ είναι πραγματικός.

150)*Αν Re(z)Re(w) > 0 και $z \neq -\bar{w}$,τότε η εικόνα του μιγαδικού $\dfrac{z-w}{z+\bar{w}}$ ανήκει στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου και αντίστροφα.

151)Αν ο λόγος των αποστάσεων του μιγαδικού z από τις εικόνες των μιγαδικών $z_1 = -16$ και $z_2 = -1$ είναι 4 να δείξετε ότι οι εικόνες του z ανήκουν σε κύκλο.

152)Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ με $\alpha \in C$ και $0 < |\alpha| < 1$, $0 < |z| \leq 1$. Να αποδειχθεί ότι:

a) $\bar{a}z \neq 1$
b) ο z ανήκει στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου αν και ο μόνο αν ο f(z) ανήκει στο εσωτερικό του ίδιου κύκλου.
c) $|z| = 1$ αν και μόνο αν $|f(z)| = 1$
d) $f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \frac{1}{\overline{f(z)}}$, $z \neq a$

153)*α) Να βρεθεί ο γ. τ. των εικόνων των μιγαδικών ζ με την ιδιότητα $|\zeta + i| < |\zeta - i|$.
β) αν οι μιγαδικοί z, w, v ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο να αποδειχθεί ότι και το άθροισμα τους ανήκει στον ίδιο γ.τ.

154)**α) Αν $\omega\bar{z} \in R$, τότε οι εικόνες των z, ω και η αρχή των αξόνων είναι σημεία συνευθειακά και αντίστροφα.
β) Αν $|\omega| = 1$ να δειχθεί ότι οι διανυσματικές ακτίνες των μιγαδικών ω^2, $\omega + \omega^3$ ανήκουν σε ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων.
γ) Έστω $z, \omega \in C$ με $|z| = |\omega|$, $z \neq i\omega$. Να αποδειχθεί ότι οι εικόνες των μιγαδικών $\alpha = (z + i\omega)^{2004}$, $\beta = (z - i\omega)^{2004}$ και η αρχή των αξόνων είναι σημεία συνευθειακά. Στην συνέχεια να δειχθεί ότι υπάρχει $\theta > 0$ ώστε $\alpha = \theta\beta$.

155)Έστω z_1, z_2, z_3 μιγαδικοί με $|z_1| = 1$, $|z_2| = 3$ και $|z_3| = 5$. Να δείξετε ότι:

α) $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$ β) $\frac{|25z_1z_2 + z_2z_3 + 9z_1z_3|}{|z_1 + z_2 + z_3|} = 15$

156)Έστω z_1, z_2, z_3 μιγαδικοί με $|z_1| = 2$, $|z_2| = 3$ και $|z_3| = 4$ και $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$ να δείξετε ότι $\frac{|16z_1z_2 + 4z_2z_3 + 9z_1z_3|}{|z_1 + z_2 + z_3|} = 24$

157)Έστω $z \in C$ με $|z| \leq \sqrt{3} - 1$, να δείξετε ότι $|2z \cdot \eta\mu\theta + z^2| \leq 2$ για κάθε $\theta \in R$.

158)Έστω μιγαδικοί z_1, z_2, z_3, z_4 για τους οποίους ισχύουν: $z_1 + z_3 = z_2 + z_4$ και $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = c$, $c>0$. Να δειχθεί ότι το τετράπλευρο $M_1M_2M_3M_4$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, όπου M_1, M_2, M_3, M_4 είναι οι εικόνες των z_1, z_2, z_3, z_4.

159)Δίνεται η ισότητα $z\bar{z} + 4\,\mathrm{Re}[(1-2i)z] + 4 = 0$

a) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού z
b) Αν z_1, z_2 είναι δυο μιγαδικοί του παραπάνω γεωμ. τ. να δείξετε ότι $|z_1 - z_2| \leq 8$.
c) Αν z_1, z_2 είναι δυο μιγαδικοί του παραπάνω γεωμ. τ. με $|z_1 - z_2| = 8$ να δείξετε ότι $|z_1 + z_2|^2 = 2^4 \cdot 5$

160)Αν οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν σε κύκλο κέντρου Κ(1, 1) και ακτίνας $\sqrt{2}$, να βρεθεί που ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών w με $w \cdot \bar{z} = 1$

161)Αν οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν σε κύκλο κέντρου Ο(0, 0) και ακτίνας 2, να βρεθεί που ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών w με $w = \dfrac{z-2}{z}$

162)Αν Α, Β, Γ οι εικόνες των μιγαδικών z, w, u αντίστοιχα με $z \neq w$ και $u = iz + (1 - i)w$, δείξτε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές ορθογώνιο.

163)Αν $z, w \in C$ με $z^2 - \sqrt{2}zw + w^2 = 0$ και Α, Β οι εικόνες των z^2, w^2 τότε να δείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. (όπου Ο η αρχή των αξόνων)

164)Αν $w = \dfrac{z+2i}{iz+2}, z \in C, z \neq \pm 2i$ και η εικόνα του z κινείται στον άξονα χ΄χ να αποδείξετε ότι
a) Η εικόνα του w κινείται σε κύκλο
b) Βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|w - 2 - 2i|$

165)* Η εξίσωση $z^2 + \beta z + \gamma = 0$ με β, γ πραγματικούς έχει ρίζες τους z_1, z_2 που δεν είναι πραγματικοί. Να δείξετε ότι:
a. $|x - z_1| = |x - z_2|$ για κάθε $x \in R$
b. $|x - z_1| = |x - z_2| = \sqrt{x^2 + \beta x + \gamma}$ για κάθε $x \in R$

166)Α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης $f(t) = \sqrt{1-(2-t)^2}$.
Β. Αν $z = 3 - t + if(t)$, $t \in A$, να δειχθεί ότι οι διανυσματικές ακτίνες των μιγαδικών $\alpha = z^2$ και $\beta = z - 1$, $z \neq 0$ είναι ομόρροπες.

167)Έστω ο μιγαδικός $z = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in R$, $\beta \neq 0$ και ο μιγαδικός $w = \dfrac{2-\bar{z}}{2+\bar{z}}$ έτσι ώστε ο $w - z$ να είναι πραγματικός. Να αποδείξετε ότι:
a) $|z + 2| = 2$
b) $w - z = 1$.

168)**Έστω οι μιγαδικοί z, w με τις ιδιότητες $|z|^2 + z\bar{w} = 1$, $|w|^2 + \bar{z}w = 3$

a) Να δείξετε ότι $|z + w| = 2$.
b) Να δείξετε ότι οι εικόνες των z και w ανήκουν σε κύκλους με κέντρο την αρχή των αξόνων , των οποίων να βρείτε και την ακτίνα.
c) Να βρείτε την απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z και w.
d) Να δείξετε ότι οι εικόνες των z, w και η αρχή των αξόνων είναι συνευθειακά σημεία.